MATHCRAFT

DESCUBRE LA MATEMÁTICA DETRÁS DEL JUEGO

Frogs and Toads

Patrones • Sucesiones • Estrategia • Algoritmos

Jugar online



¿En qué consiste?

Frogs and Toads es un rompecabezas matemático en el que dos grupos de animales se encuentran enfrentados sobre una fila de posiciones.
Las ranas comienzan a un lado y los sapos al otro, separados por **un único espacio vacío**.
El desafío consiste en conseguir que ambos grupos **intercambien completamente sus posiciones**.
Sin embargo, existe una condición fundamental:

ningún animal puede moverse hacia atrás.

Cada movimiento debe acercarlo a su lado de destino.
El desafío no consiste solamente en conseguir el intercambio, sino en descubrir:

¿cuál es el mínimo número de movimientos?

Objetivo

Desarrollar estrategias de resolución de problemas mediante la experimentación sistemática, el reconocimiento de patrones, la organización de datos y la formulación de una regla general que permita predecir el número mínimo de movimientos necesarios para resolver el rompecabezas.

Reglas del juego

Los animales pueden realizar solamente dos tipos de movimiento:

1. **Deslizarse:**

   un animal puede avanzar una posición si el espacio inmediatamente delante de él está vacío.

   avance de 1 posición

2. **Saltar:**

   un animal puede saltar sobre **un animal del grupo contrario** si inmediatamente después existe un espacio vacío.

   avance de 2 posiciones

Además:

- las ranas avanzan solamente hacia su lado de destino;
- los sapos avanzan solamente en la dirección contraria;
- ningún animal puede retroceder;
- no se puede saltar sobre dos animales;
- no se puede ocupar una posición que ya esté ocupada;
- el desafío termina cuando ambos grupos intercambian completamente sus posiciones.

Ficha del desafío

Curso: 4° básico a IV medio

Tiempo: 15–35 minutos

Modalidad: Individual, parejas o grupos

Materiales: Juego online, lápiz y hoja de registro

Matemática que descubrirás

- Patrones.
- Sucesiones.
- Generalización.
- Expresiones algebraicas.
- Estrategia.
- Algoritmos.
- Invariantes.
- Demostración.

Preguntas para promover el pensamiento

- ¿Conviene deslizar o saltar?
- ¿Cuándo puede quedar bloqueado el juego?
- ¿Cuántos movimientos necesitas con una rana y un sapo?
- ¿Y con dos de cada uno?
- ¿Qué ocurre con tres?
- ¿Cuántos saltos realizaste?
- ¿Cuántos deslizamientos?
- ¿Qué patrón aparece en los resultados?
- ¿Puedes predecir el resultado para cuatro?
- ¿Y para diez sin jugar?
- ¿Cómo puedes saber que tu solución es mínima?
- ¿Puedes escribir una fórmula para cualquier cantidad?

¿Sabías que...?

Frogs and Toads pertenece a una familia clásica de rompecabezas de intercambio que también aparece con nombres como *Traffic Jam*, *Hares and Tortoises* y *Sheep and Goats*.
El problema aparece relacionado con el trabajo de los matemáticos **Elwyn Berlekamp, John Conway y Richard Guy** y con el estudio de juegos matemáticos y teoría de juegos combinatorios.
Lo interesante es que un problema que puede jugarse simplemente moviendo fichas sobre una fila permite investigar ideas mucho más profundas:

patrones → conjeturas → álgebra → demostración.

Colección MathCraft
Descubre la matemática detrás del juego.

© MathCraft
Esta obra se distribuye bajo la licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional**.

MATHCRAFT

DESCUBRE LA MATEMÁTICA DETRÁS DEL JUEGO

Frogs and Toads

Patrones • Sucesiones • Estrategia • Algoritmos

Jugar online

Investiga el patrón

Comienza experimentando con la misma cantidad de ranas y sapos a cada lado.
Completa la tabla intentando utilizar el **mínimo número de movimientos**.

n	**Saltos**	**Deslizamientos**	**Total**
1			
2			
3			
4			
5			
6			

¿Qué patrón observas en la cantidad de saltos?

¿Qué patrón observas en los deslizamientos?

Conjetura una fórmula para el total de movimientos.

La matemática de Frogs and Toads

Supongamos que tenemos

$$n$$

ranas y

$$n$$

sapos.
Para intercambiar completamente sus posiciones, cada rana debe cruzarse con cada uno de los n sapos.
Por lo tanto, el número de cruces necesarios es

$$n \cdot n = n^2.$$

Como cada cruce se produce mediante un salto,

$$\boxed{\text{Saltos} = n^2}.$$

Además, para completar el intercambio son necesarios

$$\boxed{\text{Deslizamientos} = 2n}.$$

Por lo tanto, el número mínimo total de movimientos es

$$M(n) = n^2 + 2n.$$

Factorizando:

$$\boxed{M(n) = n(n+2)}.$$

Así podemos predecir el resultado sin realizar el juego.
Por ejemplo, para $n = 5$:

$$M(5) = 5(5+2) = 35.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{35 \text{ movimientos}}.$$

Del juego a una sucesión

Al registrar el número mínimo de movimientos obtenemos:

$$3, \quad 8, \quad 15, \quad 24, \quad 35, \quad 48, \ldots$$

Calculemos las diferencias entre términos consecutivos:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 8 & 15 & 24 & 35 & 48 \\ & +5 & +7 & +9 & +11 & +13 \end{array}$$

Las primeras diferencias forman la sucesión de números impares:

$$5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad 13, \ldots$$

Y las segundas diferencias son constantes:

$$\boxed{2}.$$

Esto es una señal de que la expresión que genera la sucesión es **cuadrática**.
En efecto,

$$\boxed{M(n) = n^2 + 2n}.$$

Así, un rompecabezas de movimiento conduce naturalmente al estudio de **sucesiones cuadráticas**.

¿Y si hay cantidades diferentes?

Supongamos ahora que tenemos:

$$m \text{ ranas} \qquad \text{y} \qquad n \text{ sapos}.$$

Cada una de las m ranas debe cruzarse con cada uno de los n sapos.
Por lo tanto, son necesarios

$$\boxed{mn \text{ saltos}}.$$

Además, se requieren

$$\boxed{m + n \text{ deslizamientos}}.$$

Así, el número mínimo total de movimientos es

$$\boxed{M(m, n) = mn + m + n}.$$

Por ejemplo, con 3 ranas y 5 sapos:

$$M(3, 5) = 3 \cdot 5 + 3 + 5 = 15 + 8 = \boxed{23}.$$

La fórmula anterior contiene como caso particular la situación simétrica $m = n$:

$$M(n, n) = n^2 + 2n.$$

¿Cómo sabemos que no puede hacerse en menos movimientos?

Encontrar una solución no demuestra automáticamente que sea la mejor.
Para justificar el mínimo podemos analizar los cruces.
Si existen m ranas y n sapos, cada rana debe terminar al otro lado de **cada sapo**.
Por lo tanto, deben producirse necesariamente

$$mn$$

cruces entre animales de grupos diferentes.
Un único salto puede realizar solamente uno de estos cruces.
Por ello,

$$\boxed{\text{se necesitan al menos } mn \text{ saltos.}}$$

Además, el espacio vacío debe desplazarse de manera que todos los animales puedan completar el intercambio, lo que exige

$$m + n$$

deslizamientos.
Por lo tanto, cualquier solución necesita al menos

$$mn + m + n$$

movimientos.
Como existe una estrategia que consigue exactamente esa cantidad,

$$\boxed{M_{\text{mín}} = mn + m + n}.$$

No solamente encontramos una solución:

demostramos que es óptima.

Del juego a un algoritmo

Resolver el rompecabezas mediante ensayo y error puede funcionar para casos pequeños, pero se vuelve difícil cuando aumenta la cantidad de animales.
Una estrategia sistemática puede expresarse mediante instrucciones:

1. Observa qué animales pueden moverse.
2. Si existe un salto que permite continuar el intercambio, analízalo antes de deslizar.
3. Evita producir configuraciones en las que ningún animal pueda avanzar.
4. Mantén el proceso de intercambio entre ambos grupos.
5. Repite hasta que todos hayan cambiado de lado.

Una secuencia finita y ordenada de instrucciones para resolver un problema recibe el nombre de

algoritmo.

Por eso Frogs and Toads también permite introducir ideas de **pensamiento computacional**.

Para el docente

Se recomienda **no entregar inicialmente la fórmula**.
Una posible secuencia de investigación es:

1. Resolver el caso de una rana y un sapo.
2. Resolver el caso de dos y registrar los movimientos.
3. Continuar con tres y cuatro.
4. Separar el número de **saltos** y **deslizamientos**.
5. Organizar los resultados en una tabla.
6. Buscar regularidades en cada columna.
7. Predecir el resultado para el siguiente caso.
8. Formular una expresión general.
9. Explicar por qué aparecen n^2 saltos.
10. Justificar por qué la solución encontrada es mínima.
11. Extender el problema a cantidades diferentes m y n.

La progresión central puede resumirse como:

Jugar → Registrar → Detectar → Conjeturar → Generalizar → Demostrar

Extensiones y desafíos

- **Predice antes de jugar:** calcula cuántos movimientos deberían necesitarse con 6, 8 y 10 animales de cada tipo.
- **Separa los movimientos:** para cada caso, registra por separado saltos y deslizamientos.
- **Sucesión:** estudia la sucesión
$$3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35, \ldots$$
y analiza sus primeras y segundas diferencias.
- **Representa:** grafica los puntos
$$(n, M(n))$$
y describe la forma de la gráfica.
- **Cantidades diferentes:** investiga experimentalmente los casos 2 ranas y 3 sapos, y 3 ranas y 4 sapos.
- **Generaliza:** comprueba experimentalmente la fórmula
$$M(m, n) = mn + m + n.$$
- **Demuestra:** explica por qué cada rana debe cruzarse exactamente una vez con cada sapo.
- **Algoritmo:** escribe instrucciones que permitan a otra persona resolver el rompecabezas sin conocer previamente la solución.
- **Programa:** diseña un algoritmo que determine los movimientos posibles desde cualquier configuración.

¿Qué habilidades desarrolla?

- Resolución de problemas.
- Reconocimiento de patrones.
- Sucesiones.
- Generalización.
- Expresiones algebraicas.
- Estrategia.
- Razonamiento lógico.
- Conjeturación.
- Argumentación.
- Demostración.
- Pensamiento algorítmico.
- Pensamiento computacional.

Colección MathCraft

Descubre la matemática detrás del juego.

© MathCraft

Esta obra se distribuye bajo la licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional**.